RELACIONES DE RECURRENCIA

SUCESIONES.

Definición 1. Una *sucesión* es una función que va de Naturales en Reales; si va de Naturales en Enteros se llama *Sucesión entera*

Una sucesión se denota:

o bien: o bien:

Los elementos son *términos* de la sucesión. es el primer término de la sucesión, es el segundo término de la sucesión y así siguiendo es el término *n-ésimo* de la sucesión.

Si se incluye el cero en el dominio de la sucesión, será el primer elemento de la sucesión y será el término (n+1)-ésimo elemento de la misma.

Por ejemplo, en la sucesión 2, 4, 6, … la fórmula para determinar el n-ésimo término es relativamente simple: . Si necesitamos calcular se resolverá calculando . Es claro que para conocer no ha sido necesario conocer los términos anteriores.

Consideremos las siguientes sucesiones:

Sin embargo no en todas las sucesiones es posible conocer una fórmula explícita para el término n-ésimo, por ejemplo

S4 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 . . .

Relaciones de Recurrencia

Hay series donde es posible conocer una expresión para el término *n*-ésimo, pero este no es una función explícita de *n*.

La sucesión de Fibonacci S5 : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . donde cada término es la suma de los dos anteriores (). Veamos que esta serie no tiene una fórmula explícita para ; para conocer el valor de es necesario conocer antes los valores de y de ; pero para conocer el valor de es necesario conocer antes los valores de y de ; y así siguiendo.

Así:

pero:

entonces:

Vemos de que manera, para calcular el término n-ésimo es necesario conocer los términos anteriores.

Definición 2.

Si en una sucesión el término puede ser expresado en función de los términos anteriores ; decimos que la expresión es una *relación de recurrencia* y se puede expresar:

.

En general, para poder calcular los términos de una sucesión, es necesario conocer al menos un término de la misma.

Definición 3.

Sea *k* el entero menor para el cual tenemos asignados valores de . Luego permite calcular valores únicos para si .

Los valores de se llaman *condiciones iniciales o condiciones de frontera* de la relación. Las condiciones iniciales con la relación de recurrencia generan unívocamente la sucesión.

Generalmente la relación de recurrencia está dada por

para

con condiciones iniciales .

En este caso decimos que la sucesión satisface la relación de recurrencia para , con condiciones iniciales .

Definición 4.

La fórmula explícita para que permite calcular la expresión para cada valor de *n*, sin necesidad de conocer los términos previos, se llama *solución general* de la relación de recurrencia.

Ejemplo 1

Sean las siguientes *sucesiones*, con sus correspondientes *condiciones iniciales*, encuentre la *solución general* de la ecuación de recurrencia que las determinan.

con

Rta.

con

Rta.

**Clasificación de las Relaciones de Recurrencia**

* *Lineales* o *No Lineales*: Una relación de recurrencia *es lineal cuando cada término aparece elevado a la primera potencia*. Caso contrario es no lineal.
* Con *Coeficientes constantes* o con *Coeficientes variables*: Una ecuación de recurrencia *tiene coeficientes constantes cuando los coeficientes que acompañan cada término en la expresión son constantes*. Caso contrario, cuando al menos uno de los coeficientes es una función de *n*, se considera que la relación de recurrencia tiene coeficientes variables.
* *Homogéneas* o *No homogéneas*: Una relación de recurrencia *es homogénea cuando la sucesión idénticamente nula la satisface, es decir, cuando para todo n satisface la relación.* Caso contrario es no homogénea.

* De orden . De acuerdo al número de predecesores inmediatos de los cuales depende el término de mayor subíndice.

Ejemplo 2.

a) La relación de recurrencia , es lineal, con coeficientes constantes, de primer orden y homogénea.

Es homogénea porque reemplazando por 0, es válida la identidad para todo .

b) La relación de recurrencia , es lineal, con coeficientes constantes, de primer orden y homogénea, porque .

c) La relación de recurrencia , es lineal, con coeficientes constantes, de primer orden y no homogénea, porque .

d) La relación de recurrencia , no es lineal, con coeficientes variables, de tercer orden y homogénea.

Se la puede escribir , con lo que la clasificación queda mejor evidenciada.

Ejemplo 3.

Sea la relación de recurrencia dada por: .

1. Clasifíquela según los criterios vistos.
2. Calcule algunos términos en forma directa.
3. Halle y verifique la solución general.

Respuesta

1. Es una relación de recurrencia lineal, con coeficientes constantes, de primer orden, no homogénea.

.

.

.

En general

= 0

Ejemplo 4.

Sea la relación de recurrencia dada por: .

1. Clasifíquela según los criterios vistos.
2. Calcule algunos términos en forma directa.
3. Halle y verifique la solución general.

Respuesta

1. Es una relación de recurrencia lineal, con coeficientes constantes, de primer orden, no homogénea.

.

.

.

por tanto

Solución General

= 0

Un caso de solución mediante sustitución en reversa.

Ejemplo 6.

Sea la relación de recurrencia dada por: .

a) Clasifíquela según los criterios vistos.

1. Halle y verifique la solución general.

Respuesta

Resolveremos aplicando una técnica nueva llamada *sumas telescópicas*

1. Es una relación de recurrencia lineal, con coeficientes constantes, de primer orden, no homogénea. (puede resolverse aplicando sustitución en reversa)

.

.

.

sumando miembro a miembro todas estas igualdades tenemos que:

por tanto

Solución General

1. Verificación:

= 0

Relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes constantes

Definición: Una relación de recurrencia es una *relación lineal, homogénea con coeficientes constantes de orden k* () si es de la forma:

(1)

son constantes reales y

La Solución General tiene la forma: (2)

Al sustituir (2) en (1) queda

extraemos factor común y queda

dado que tenemos

y esta expresión es un polinomio con raíz *r* .

Tenemos un polinomio de forma

Definición:

Una *relación de recurrencia lineal homogénea de orden k*,

tiene un *polinomio característico de grado k asociado*  de forma

cuya ecuación característica es:

Ejemplo 7

Sea la relación de recurrencia homogénea lineal de primer orden

La solución general tiene la forma

Entonces:

la ecuación característica resulta

Entonces:

.

.

.

Teorema

Hipótesis: Sea una ecuación de recurrencia lineal, homogénea, de primer orden dada por:

Tesis: La solución es

Demostración: Proponemos como solución

Sustituyendo tenemos

de donde ; resulta que la ecuación característica tiene solución ; luego la solución general es: .

Relación de recurrencia lineal, homogénea, de segundo orden

Sea con condiciones iniciales y

La Solución General tiene la forma:

extraemos factor común y queda

dado que tenemos

y este polinomio con raíz *r* da lugar a la *ecuación característica*

Por der una ecuación de segundo grado puede tener:

1. dos raíces reales distintas
2. dos raíces iguales
3. dos raíces complejas conjugadas

trataremos los dos primeros casos.

1. Si la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas y , la solución general de la relación de recurrencia es:

donde y son constantes que dependen de las condiciones iniciales y se calculan con el sistema lineal:

1. Si la ecuación característica tiene dos raíces reales iguales , la solución general de la relación de recurrencia es:

donde y son constantes que dependen de las condiciones iniciales y se calculan con el sistema lineal:

Ejemplo:

Halle la solución general para la sucesión definida por:

Solución:

La ecuación característica es: , donde y

La ecuación característica resulta: cuyas soluciones son: y .

La solución general de la relación de recurrencia homogénea es:

resulta entonces:

calculamos y mediante:

que tiene como solución: y , entonces la solución general será: